

Шкільний Олександр Володимирович,

кандидат фіз.- мат. наук, доцент,
НПУ імені М.П. Драгоманова

**СТВОРЕННЯ ЯКІСНИХ
ТЕСТОВИХ ЗАВДАНЬ
З МАТЕМАТИКИ**

Суми, 4 грудня 2015 року

ОСНОВНІ ТИПИ ЗАВДАНЬ З МАТЕМАТИКИ

- Завдання з вибором однієї правильної відповіді з кількох запропонованих альтернатив.
- Завдання з вибором кількох правильних відповідей з кількох запропонованих альтернатив (кількість ключів може бути як відомою, так і невідомою).
- Завдання з короткою відповіддю (одним числом або виразом).
- Завдання на відшукування логічних пар.
- Завдання на достатність даних у формі аналізу двох даних.
- Завдання на достатність даних у формі порівняння величин.
- Завдання на встановлення правильної послідовності дій.
- Усні та письмові завдання з повним поясненням (із розгорнутою відповіддю).

ЗАВДАННЯ З АЛЬТЕРНАТИВАМИ

Традиційно застосовуються під час...	Переваги	Недоліки
1) контролю знання означень найпростіших понять та формулювань основних тверджень; 2) контролю вміння розв'язувати найпростіші вправи; 3) для контролю знань та вмінь, якщо інші типи завдань неможливо застосувати.	1) прості для перевірки в ручному чи машинному режимі; 2) чи не найкращі для проведення адекватного ранжування рівня досягнень; 3) дозволяють точно з'ясувати, які саме знання чи вміння є сформованими чи не сформованими.	1) допускають можливість застосування технологій «угадкування»; 2) вимога переважної однокроковості значно звужує спектр можливих завдань та їх тематичне покриття; 3) до цього часу є досить незвичними для учнів і можуть викликати в них психологічне напруження.

ПРИКЛАДИ ЗАВДАНЬ ІЗ АЛЬТЕРНАТИВАМИ

1. Укажіть *хибне* твердження.

А	Діагоналі будь-якого ромба перпендикулярні.
Б	Протилежні кути будь-якого паралелограма рівні між собою.
В	Діагоналі будь-якого прямокутника рівні між собою.
Г	Протилежні сторони будь-якого паралелограма рівні між собою.
Д	Діагоналі будь-якого паралелограма є бісектрисами його кутів.

2. Укажіть первісну функції $y = \sqrt{x}$.

А	Б	В	Г	Д
$y = \frac{1}{2\sqrt{x}}$	$y = \frac{3}{\sqrt{x^3}}$	$y = \frac{2\sqrt{x^3}}{3}$	$y = \sqrt{\frac{x^2}{2}}$	$y = \frac{2}{\sqrt{x}}$

3. Правильну трикутну призму, всі ребра якої рівні між собою, вписано в циліндр. Знайдіть відношення об'єму цієї призми до об'єму цього циліндра.

А	Б	В	Г	Д
$\frac{\sqrt{3}}{2\pi}$	$\frac{3\sqrt{3}}{4\pi}$	$\frac{3\sqrt{2}}{4\pi}$	$\frac{\sqrt{3}}{4\pi}$	$\frac{\sqrt{2}}{2\pi}$

МЕТОДИЧНІ РЕКОМЕНДАЦІЇ ЩОДО СТВОРЕННЯ ЗАВДАНЬ ІЗ АЛЬТЕРНАТИВАМИ

В основному, ці завдання мають бути простими (тобто їх розв'язання повинно передбачати виконання лише 1-3 логічних кроків), оскільки головною їх метою є перевірка розуміння суті математичних понять на елементарному рівні, а також уміння виконувати найпростіші та стандартні технічні вправи.

Однак, із кожного правила існують і винятки. Часто буває так, що доцільно включити до тесту складніші завдання (більш ніж на 1-3 логічні кроки), які дуже важко, а іноді й просто неможливо сформулювати у вигляді завдання з короткою відповіддю, а завдань із повним поясненням уже є «повний комплект».

Наприклад, у формі завдання з варіантами відповідей іноді формують задачі теоретичного змісту, на встановлення істинності кількох тверджень. Однак, таких завдань у тесті має бути небагато, оскільки чим більше логічних кроків під час розв'язання передбачає завдання, тим важче зрозуміти, які саме помилки найчастіше допускає учень у ході розв'язування.

Важливо також у формулюваннях завдань з вибором правильної відповіді, щоб це завдання здебільшого перевіряло знання чи уміння, які стосуються матеріалу *лише однієї теми*. Дійсно, в протилежному випадку, важко зрозуміти із загального результату, який матеріал учень засвоїв повністю, а який – або зовсім не засвоїв, або засвоїв частково.

Завдання 1. Знайдіть похідну функції $y = \cos 5x$.

А	Б	В	Г	Д
$-\sin 5x$	$\sin 5x$	$-5 \sin 5x$	$5 \sin 5x$	$\frac{1}{5} \sin 5x$

Розв'язання є очевидним: $y' = (\cos 5x)' = -5 \sin 5x$ (застосовуються таблиця похідних – перший логічний крок, і правило обчислення похідної складеної функції – другий логічний крок). Отже, правильна відповідь – В.

Коментар. У задачах з вибором однієї правильної відповіді дуже важливим є «грамотно» складені *альтернативи* (варіанти відповідей). Саме від цього залежить *якість* такого завдання. Серед усіх альтернатив виділяють *ключ* (правильну відповідь) і *дистрактори* (неправильні відповіді).

Головне правило підбору дистракторів – всі вони мають бути «робочими», тобто «привабливими» для того учня, який, не знаючи методу розв'язування, прагне вгадати правильну відповідь. Неправильні відповіді також мають враховувати типові помилки, які допускають учні при розв'язуванні задач того чи іншого типу.

У завданні 1:

- дистрактор А розрахований на учнів, які не знають правила обчислення похідної складеної функції;
- дистрактор Б додає до цієї помилки ще й незнання таблиці похідних
- втрата/зміна знаку взагалі є однією з найбільш поширених учнівських помилок, а тому часто використовується при побудові неправильних варіантів відповідей, а тому дистрактор Г також є дуже природним у цьому завданні;
- дистрактор Д розрахований на тих учнів, які плутають поняття похідної та первісної даної функції.

Як бачимо, побудова альтернатив до цього завдання спрямована на те, щоб учневі, який знає відповідний матеріал, було легше розв'язати цю задачу, ніж намагатися інтуїтивно вгадати відповідь.

До недоліків при створенні завдань з вибором однієї правильної відповіді відноситься їх надмірне технічне перевантаження. Наприклад, у завданні 1 можна було би запропонувати знайти похідну функції $y = 4 \sin 5x - 3$. Така зміна умови, по-перше, веде до збільшення логічних кроків (слід пам'ятати додатково ще два правила диференціювання), а, по-друге, кількість варіантів типових помилок значно збільшується і вибрати з них лише чотири доволі непросто.

Завдання з альтернативами мають не єдиний спосіб побудови «робочих» дистракторів. Найбільш вдалий серед них, на нашу думку, слід шукати експериментальним шляхом під час апробації.

ЗАВДАННЯ З КОРОТКОЮ ВІДПОВІДДЮ

Традиційно застосовуються під час...	Переваги	Недоліки
1) контролю вміння розв'язувати багатокрокові задачі на відомі алгоритми; 2) контролю вміння розв'язувати негроміздкі завдання в нестандартній постановці; 3) контролю вміння розв'язувати найпростіші вправи, якщо підбір альтернатив викликає труднощі.	1) дозволяють «покрити» значний спектр типових завдань із кожної конкретної теми курсу математики; 2) просто перевіряються в ручному чи/та машинному режимі; 3) є звичними для більшості учнів і майже не викликають психологічного напруження.	1) відсутність можливості бачити, де саме допущена помилка, веде до нерозуміння, які саме знання є незасвоєними та які вміння і навички є несформованими; 2) популярне обмеження запису відповіді десятковим дробом дозволяє застосовувати технології «вгадування».

ПРИКЛАДИ ЗАВДАНЬ ІЗ КОРОТКОЮ ВІДПОВІДДЮ

1. Розв'яжіть рівняння $\left(\frac{1}{\sqrt[3]{2}}\right)^{8x+2} = 16$. Якщо це рівняння має один корінь, то запишіть його у відповідь; якщо рівняння має кілька коренів, то запишіть у відповідь їх *добуток*.
2. Екскурсійні автобуси відходять від залізничного вокзалу міста Х кожні 45 хвилин і можуть вмістити 32 пасажири кожен. Відомо, що перший автобус відходить від залізничного вокзалу міста Х о 9⁰⁰, а останній – пізно ввечері. Тамара підійшла до черги на екскурсійний автобус о 12¹⁰ і була в ній 38-ю. Скільки хвилин пані Тамара чекатиме автобус?
3. Із Києва до Львова є 7 прямих поїздів, 5 прямих автобусів і 2 прямих авіарейси. Скільки існує різних варіантів поїздки з Києва до Львова одним із цих трьох видів транспорту?

МЕТОДИЧНІ РЕКОМЕНДАЦІЇ ЩОДО СТВОРЕННЯ ЗАВДАНЬ ІЗ КОРОТКОЮ ВІДПОВІДДЮ

Завдання цього типу можуть містити більшу кількість логічних кроків, ніж задачі з вибором однієї правильної відповіді. До цього типу, зокрема, відносять завдання, які не можна сформулювати як завдання з альтернативами через велику кількість варіантів поширених помилок, що можуть виникнути при їх розв'язуванні.

Однак, слід зауважити, що традиційно завдання з короткою відповіддю мають бути *стандартними*, тобто алгоритми їх розв'язування здебільшого відомі. Причому, *чим більшу кількість логічних кроків передбачає розв'язання такого завдання, тим стандартнішим воно має бути*. Якщо ж завдання має елемент нетрадиційності, зокрема, має незвичне формулювання, то його розв'язання не повинно містити громіздких технічних операцій, наприклад, складних перетворень виразів зі змінними при розв'язуванні рівнянь чи нерівностей.

Важливою вимогою при створенні завдань із короткою відповіддю є неможливість їх «пробомблювання» (вгадування) різними методами: прямою підстановкою, звуженням умови, оцінкою тощо (ці прийоми ми розглянемо далі).

Хоча в багатьох випадках автор завдання свідомо може закладати існування альтернативних нетрадиційних розв'язань. Головним при цьому є те, щоб *усі такі розв'язання перевіряли знання та уміння учня з відповідної теми та/або його творчі здібності та нестандартне мислення у межах цієї теми*.

Завдання 2. Скільки *цілих* розв'язків має нерівність $\frac{1}{\log_{x^2} 30} < 1$?

Розв'язання. Знайдемо ОДЗ нерівності: $x \neq 0; x \neq \pm 1$. Тоді дана нерівність рівносильна до нерівності $\log_{30} x^2 < 1$, звідки: $x^2 < 30, x \in (-\sqrt{30}; \sqrt{30})$. Враховуючи ОДЗ, отримаємо, що $x \in (-\sqrt{30}; -1) \cup (-1; 0) \cup (0; 1) \cup (1; \sqrt{30})$. Оскільки $5 < \sqrt{30} < 6$, то цілими числами, які задовольняють початкову нерівність, є $-5; -4; -3; -2; 2; 3; 4; 5$. Отже, нерівність має 8 цілих розв'язків.

Коментар. Одразу зауважимо, що при розв'язуванні цієї задачі отримувати відповідь у вигляді числового проміжку не обов'язково, досить перелічити цілі числа, які належать інтервалу $(-\sqrt{30}; \sqrt{30})$ і врахувати ОДЗ. Крім того, слід бути дуже уважними саме при врахуванні ОДЗ, оскільки саме це є головним джерелом неправильних відповідей при розв'язуванні рівнянь і нерівностей.

Зауважимо також, що авторам завдань із короткою відповіддю не слід зловживати знаходженням кількості розв'язків рівняння чи нерівності, особливо, коли це стосується задач зі складною будовою множини розв'язків. У цьому випадку учень може правильно розв'язати рівняння чи нерівність, але неправильно підрахувати кількість потрібних розв'язків. Наприклад, це може статися тоді, коли проміжок є занадто довгим і містить нуль, а потрібно знайти кількість цілих чисел, що належать цьому проміжку. Тому бажано, щоб шукана кількість, з одного боку, не була надто великою, а з іншого – надто малою і легко вгадуваною шляхом підстановки чи оцінки.

Завдання 3. Альпініст Богдан Упертий здійснив сходження на гору Круту. Відомо, що він підіймався угору зі швидкістю 2 км/год, а спускався – зі швидкістю 4 км/год. Знайдіть середню швидкість пана Упертого за весь час, який тривало сходження, якщо відомо, що схил для підйому мав удвічі меншу довжину, ніж схил для спуску, а час відпочинку на вершині був удвічі менший за час підйому на неї.

Розв'язання. Типовою помилкою під час розв'язання цієї задачі є знаходження у якості відповіді середнього арифметичного між швидкістю підйому та швидкістю спуску. Зрозуміло, що таке «розв'язання» є неправильним.

Середня швидкість всього сходження обчислюється як частка всієї подоланої відстані та всього затраченого часу, тобто $v_{\text{сер}} = \frac{S_{\text{заг}}}{t_{\text{заг}}}$. Нехай довжина схилу для підйому дорівнює x км. Тоді довжина схилу для спуску дорівнює $2x$ км. Отже, $S_{\text{заг}} = x + 2x = 3x$ км. Час, витрачений на підйом, дорівнює $t_1 = \frac{x}{2}$ год, а час, витрачений на спуск, $t_2 = \frac{2x}{4} = \frac{x}{2}$ год. Крім того, час на відпочинок на вершині становив $t_3 = \frac{1}{2} \cdot \frac{x}{2} = \frac{x}{4}$ год. Тому $t_{\text{заг}} = \frac{x}{2} + \frac{x}{2} + \frac{x}{4} = \frac{5x}{4}$ год, а середня швидкість $v_{\text{сер}} = \frac{3x}{\frac{5x}{4}} = \frac{12}{5} = 2,4$ км/год.

Коментар. Як бачимо, завдання 3 дійсно є стандартним і, хоч його розв'язання передбачає виконання принаймні чотирьох логічних кроків, ці кроки є природними і навіть очевидними для тих учнів, які *розв'язують* завдання, а не прагнуть вгадати відповідь до нього.

Завдання 3 має альтернативні способи розв'язування.

Наприклад, оскільки в цьому завданні розв'язання *не залежить від значення* змінної x , то *можна* було взяти замість нього конкретне число і провести аналогічні міркування вже для конкретних числових значень відстані та часу.

Здавалося б, такий спосіб можна віднести до способів угадування, однак, знову все залежить від мети, яку ставив перед собою автор завдання. Справді, якщо планувалося перевірити знання суті поняття середньої швидкості та вміння правильно її обчислювати, то ця мета, очевидно, в завданні досягається, незалежно від того, чи вона розв'язана в загальному випадку, чи для конкретного значення x .

Якщо ж планувалося додатково перевірити вміння абстрагуватися від конкретних числових значень, а також вміння перетворювати буквенні вирази, то така мета *може* не досягатися. Іншими словами, таке завдання не дозволяє «убити двох зайців одразу» і в цілісному тесті для перевірки вміння перетворювати буквенні вирази має бути присутнє окреме завдання.

Як підсумковий висновок до завдань із короткою відповіддю, зауважимо, що в найкращому випадку кожне з них повинно перевіряти знання та уміння з *лише однієї теми*. Цей самий висновок стосується також і завдань із вибором однієї правильної відповіді, але там він є більш очевидним, внаслідок вимоги простоти та обмеженості кількості логічних кроків. Для завдань із короткою відповіддю такий висновок є менш очевидним, але, після детального аналізу, врешті-решт приходимо саме до нього.

Дійсно, якщо завдання перевіряє кілька різних тем, то з його негативного результату абсолютно не зрозуміло, яку саме тему не опанував учень, а з якої він має належні знання. «Широта» тематичного покриття за рахунок збільшення тем, які перевіряються одним завданням, у цьому випадку є не більш ніж ілюзією.

Для перевірки знань із кількох розділів математики, на нашу думку, найкраще підходять завдання з розгорнутою відповіддю (з повним поясненням), про які йтиметься далі.

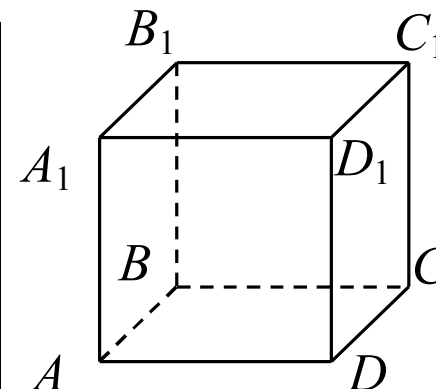
ЗАВДАННЯ НА ВІДШУКАННЯ ЛОГІЧНИХ ПАР

Традиційно застосовуються під час...	Переваги	Недоліки
1) контролю теоретичних знань, що «покривають» всі основні поняття деякої теми курсу математики; 2) контролю вміння розв'язувати всі типові завдання з деякої теми курсу математики; 3) перевірки вміння встановлювати причинно-наслідкові зв'язки між поняттями.	1) дозволяють одним завданням перевірити знання кількох понять чи вміння розв'язувати кілька типових завдань з деякої теми курсу математики; 2) дозволяють здійснити ширше тематичне «покриття» під час перевірки знань чи умінь з деякої теми курсу математики.	1) після правильного розв'язання кількох під завдань є можливість застосування технологій «угадкування» шляхом виключення; 2) використовуються в українських школах лише протягом останнього десятиліття і ще не стали звичними для більшості учнів.

ПРИКЛАДИ ЗАВДАНЬ НА ВІДШУКАННЯ ЛОГІЧНИХ ПАР

1. На малюнку зображено куб $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$. До кожного початку речення (1-4) доберіть його закінчення (А-Д) так, щоб утворилося правильне твердження.

Початок речення	Закінчення речення
1 Пряма AD	А утворює з прямою A_1B кут 45°
2 Пряма AC	Б утворює з прямою A_1B кут 60°
3 Пряма CC_1	В утворює з прямою A_1B кут 90°
4 Пряма D_1C	Г перетинає пряму A_1B
	Д паралельна до прямої A_1B



2. Установіть відповідність між геометричними тілами (1-4) та формулами (А-Д), за якими обчислюються площі їх бічних поверхонь.

Геометричне тіло	Формула
1 Циліндр із твірною a і радіусом основи b .	А $S = \frac{1}{2} \pi ab$
2 Конус із твірною a і радіусом основи b .	Б $S = \pi ab$
3 Правильна трикутна призма зі стороною основи a і бічним ребром $\pi \cdot b$.	В $S = \frac{3}{2} \pi ab$
4 Правильна трикутна піраміда зі стороною основи a і апофемою $\pi \cdot b$.	Г $S = 2 \pi ab$
	Д $S = 3 \pi ab$

МЕТОДИЧНІ РЕКОМЕНДАЦІЇ ЩОДО СТВОРЕННЯ ЗАВДАНЬ НА ВІДШУКАННЯ ЛОГІЧНИХ ПАР

Завдання на встановлення логічних зв'язків тільки починають з'являтися під час тестування, тому великого досвіду в їх використанні та розробці ще не накопичено. Однак, не зважаючи на це, певні загальні методичні рекомендації стосовно таких завдань сформулювати можна.

За допомогою таких завдань можна перевіряти як знання лише з однієї теми, так і з кількох. Традиційно вони формуються таким чином: є дві колонки даних (дані в колонці справа найчастіше позначають літерами **А, Б, В** і т.д., а дані в колонці зліва – цифрами **1, 2, 3** і т.д.), між якими потрібно встановити логічний зв'язок, суть якого описано в умові завдання. Вважається, що *кожній літері має відповідати лише одна цифра і одна й та сама цифра не може відповідати двом різним літерам*.

Зрозуміло, що завдання на встановлення відповідностей не може оцінюватися одним балом, оскільки його розв'язання є багатоетапним. Найчастіше за кожну правильно обрану пару нараховують один бал, а отже, загальна кількість балів за таке завдання дорівнює кількості літер у лівій його колонці. Кількість літер у правій колонці може варіюватися, але має бути на 2-4 більшою, ніж кількість цифр у лівій колонці. При цьому важливо підбирати пункти з правої колонки таким чином, щоб після правильного вибору якоїсь однієї пари, наступні не обиралися автоматично, тобто потрібно, щоб на всіх етапах розв'язування завдання для учня залишалися *робочі* альтернативи.

ЗАВДАННЯ НА ДОСТАТНІСТЬ ДАНИХ

Традиційно застосовуються під час...	Переваги	Недоліки
1) перевірки здатності аналізувати проблемну ситуацію та встановлювати принципову можливість чи неможливість її однозначного розв'язання; 2) контролю вміння застосовувати абстрактні теоретичні знання до розв'язання прикладних задач.	1) чи не єдиний тип завдань, головною метою застосування якого є скоріше не перевірка фактичних знань чи умінь, а перевірка здатності до математичного моделювання ситуацій реального життя з метою встановлення можливості їх розв'язання.	1) майже не використовуються в навчальному процесі в українських школах, а тому є незвичними для вітчизняних учнів; 2) у випадку неправильної відповіді на таке завдання важко з'ясувати конкретну причину, через яку сталася ця помилка.

ПРИКЛАДИ ЗАВДАНЬ НА ДОСТАТНІСТЬ ДАНИХ

1. *Завдання:* П'ятеро учнів отримали за контрольну роботу п'ять оцінок за 12-бальною шкалою: 7, 6, 9, 11 і x . Знайдіть x .

Дані (1): Медіана вибірки дорівнює 7.

Дані (2): Мода вибірки дорівнює 7.

А	Б	В	Г	Д
Даних (1) достатньо, а даних (2) – ні.	Даних (2) достатньо, а даних (1) – ні.	І даних (1), і даних (2) самих по собі достатньо	Даних (1) і (2) лише разом достатньо	Ні даних (1), ні даних (2) навіть разом недостатньо

2. Відомо, що $\beta \in \left(\pi; \frac{3\pi}{2}\right)$.

Величина X : $\cos \beta$;

Величина Y : $\operatorname{tg} \beta$.

А	Б	В	Г
величина X більша за величину Y	величина Y більша за величину X	величини X і Y рівні між собою	для порівняння величин X і Y недостатньо даних

ЗАВДАННЯ НА ВСТАНОВЛЕННЯ ПРАВИЛЬНОЇ ПОСЛІДОВНОСТІ ДІЙ

Традиційно застосовуються під час...	Переваги	Недоліки
1) перевірки знань стандартних алгоритмів розв'язування задач різних тем курсу математики.	1) дозволяють перевірити знання саме алгоритму розв'язування завдань, уникаючи технічних огріхів під час його реалізації; 2) чи не єдиний тип завдань, за допомогою яких зручно перевіряти геометричні задачі на побудову.	1) важко шкалюються в залежності від конкретного завдання та кількості розгалужень у цьому завданні; 2) майже не використовуються в навчальному процесі в українських школах, а тому є незвичними для вітчизняних учнів.

ПРИКЛАД ЗАВДАННЯ НА ВСТАНОВЛЕННЯ ПРАВИЛЬНОЇ ПОСЛІДОВНОСТІ ДІЙ

Як поділити даний відрізок AB навпіл за допомогою циркуля та лінійки?

- А) Через точки A та B провести по дві довільні прямі: AA_1 , AA_2 , BB_1 , BB_2 .
- Б) Побудувати два кола ω_1 і ω_2 довільного, але одного і того самого радіуса $r > \frac{1}{2}AB$ з центрами у точках A та B відповідно.
- В) Побудувати два кола ω_1 і ω_2 довільного, але одного і того самого радіуса $r < \frac{1}{2}AB$ з центрами у точках A та B відповідно.
- Г) Визначити точки C_1 та C_2 як точки перетину прямих AA_1 і BB_1 та AA_2 і BB_2 відповідно.
- Д) Визначити точки C_1 та C_2 як точки перетину кіл ω_1 і ω_2
- Е) Визначити середину відрізка AB як точку перетину відрізків C_1C_2 і AB .
- Є) Визначити середину відрізка AB як точку перетину відрізків AC_1 і BC_2 .

ЗАВДАННЯ З РОЗГОРНУТОЮ ВІДПОВІДДЮ

Традиційно застосовуються під час...	Переваги	Недоліки
1) контролю знань і умінь будь-якого рівня складності; 2) засвоєння теоретичних знань з будь-якої теми; 3) формування вмінь і навичок розв'язування завдань будь-якої складності.	1) є універсальним типом завдань, який можна використовувати під час будь-якого етапу процесу навчання; 2) дозволяє чітко визначити причини неналежного рівня знань і умінь та здійснювати відповідну корекцію на будь-якому етапі процесу навчання.	1) важко шкалюються в залежності від конкретного завдання; 2) можуть допускати нерівноцінні за складністю шляхи розв'язання; 3) допускають вплив суб'єктивної думки перевіряючого на результати оцінювання.

ПРО ЗАХИСТ ВІД УГАДУВАННЯ ВІДПОВІДЕЙ ДО ТЕСТОВИХ ЗАВДАНЬ З МАТЕМАТИКИ

Під **угадуванням** ми розуміємо такий спосіб отримання відповіді до тестового завдання, який не збігається з авторським задумом стосовно цього завдання.

При цьому вгадування не є альтернативним чи більш раціональним способом розв'язування завдання. Навпаки, воно дозволяє учневі отримати правильну відповідь до тестового завдання, практично не володіючи тими знаннями, на перевірку яких воно спрямовано.

Прийомом угадування будемо називати лише такі прийоми, які дозволяють гарантовано отримати результат, а не, скажімо, звузити коло можливих варіантів з метою подальшого здійснення «гадання», тобто вибору варіанту відповіді навмання, але не з усіх запропонованих альтернатив, а з меншої їх кількості.

СІМ ОСНОВНИХ ПРИЙОМІВ УГАДУВАННЯ ВІДПОВІДЕЙ ДО ТЕСТОВИХ ЗАВДАНЬ З МАТЕМАТИКИ

Прийом перший: «Довго не думай, а перебирай!»

Полягає у виявленні грубих недоречностей в умовах тестових завдань і застосуванні прямого перебору для отримання правильної відповіді.

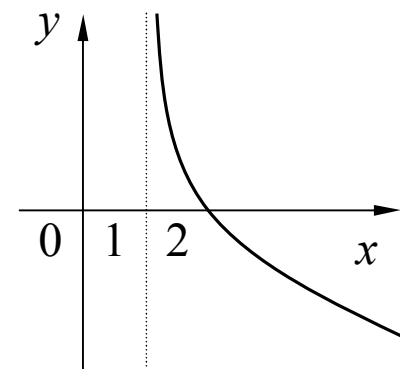
Приклад 1. Зазначте найменше ціле число, що є розв'язком нерівності $\frac{(x+1)^2 |x-3|}{x-2} \geq 0$.

А	Б	В	Г	Д
2	1	-1	3	4

«Розв'язання». Серед запропонованих альтернатив *найменшим* є число -1 з альтернативи В. Підставимо це значення в ліву частину нерівності: $\frac{(-1+1)^2 |-1-1|}{-1-2} \geq 0$, тобто отримуємо правильну числову нерівність $0 \geq 0$. Отже, правильна відповідь – В.

Приклад 2. Графік якої функції зображено на малюнку?

А	Б	В	Г	Д
$y = \log_{\frac{1}{3}} x$	$y = \log_{\frac{1}{3}} x + 1$	$y = \log_{\frac{1}{3}} x - 1$	$y = \log_{\frac{1}{3}} (x - 1)$	$y = \log_{\frac{1}{3}} (x + 1)$



«Розв’язання». Нібито в цій задачі потрібно будувати графіки методом геометричних перетворень, а для цього обов’язково знати, як виглядає графік логарифмічної функції.

Але насправді нічого цього знати зовсім не обов’язково. Бо з графіка шуканої функції видно, що $y(2) = 0$, а цю умову, очевидно, задовольняє лише функція з альтернативи Г, яка і є правильною відповіддю.

Прийом другий: *«Переходь від загального до часткового!»*

Застосовується, коли можна накласти на загальну задачу додаткові обмеження, які не змінять відповідь до неї, але спростять її розв'язання.

Приклад 3. Спростіть вираз $xy(2x-3y)-3y(x^2-xy)$.

А	Б	В	Г
$5x^2y$	$-x^2y-6xy^2$	$-x^2y+6xy^2$	$-x^2y$

«Розв'язання». Як сам вираз, так і запропоновані альтернативи залежать від значень змінних x та y . Застосуємо прийом угадування «Переходь від загального до часткового!» і підставимо у початковий вираз $x=y=1$. Отримаємо: $1 \cdot 1 \cdot (2-3) - 3 \cdot 1 \cdot (1-1) = -1$. Таку саму підстановку виконаємо для кожного з варіантів відповідей. Бачимо, що тільки у варіанті Г значення виразу дорівнює -1 . Отже, правильна відповідь – Г.

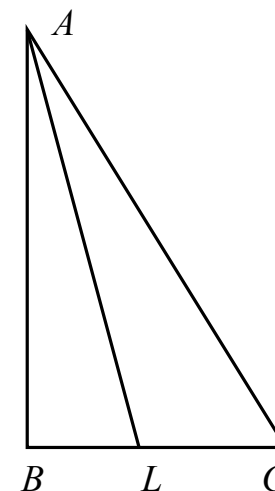
Приклад 4. У трикутнику ABC різниця між кутами B та C дорівнює 12° . Обчисліть кут між висотою та бісектрисою з вершини A .

А	Б	В	Г	Д
8°	14°	6°	21°	5°

«Розв’язання». Оскільки у задачі нічого не сказано про вид трикутника, то, зрозуміло, що відповідь *не залежатиме* від цього. Тому нехай цей трикутник – прямокутний із прямим кутом B , тобто $\angle B = 90^\circ$ (див. малюнок). Тоді, за умовою задачі, $\angle C = 90^\circ - 12^\circ = 78^\circ$, а $\angle A = 12^\circ$.

У розглядуваному прямокутному трикутнику ABC висота, проведена з вершини A , збігатиметься зі стороною AB , а бісектриса AL ділить кут A навпіл. Отже, шуканим кутом є кут BAL , градусна міра якого дорівнює $12^\circ : 2 = 6^\circ$.

Отже, правильною є відповідь **В**.



Прийом третій: «Увага! Зайві дані!»

Окремі тестові завдання можуть містити в умові дані, які дозволяють в обхід матеріалу, знання якого повинно було б перевіряти це завдання, отримувати потрібну відповідь підстановкою чи спрощенням. Тоді та частина умови завдання, яка, за задумом автора, повинна була би бути головною, фактично, стає *зайвою*, оскільки не впливає на вибір правильної відповіді.

Приклад 5. Для функції $f(x) = 3x^2$ знайдіть первісну, графік якої проходить через точку $A(-1; 2)$.

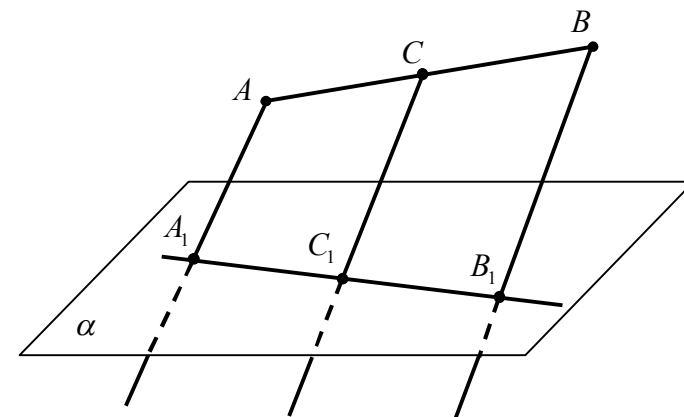
А	Б	В	Г
$F(x) = x^3$	$F(x) = x^3 - 3$	$F(x) = x^3 - 1$	$F(x) = x^3 + 3$

«Розв’язання». Використаємо прийом угадування «Увага! Зайві дані!» Шляхом підстановки координат точки $A(-1; 2)$ у функції з альтернатив А-Г переконуємося, що через цю точку проходить лише графік функції з альтернативи Г. Отже, шукати первісну для функції $f(x) = 3x^2$ зовсім не обов’язково, бо і так ясно, що правильна відповідь – Г.

Прийом четвертий: «Оцінуй!»

Інколи відповідь до тестового завдання можна отримати шляхом оцінки значення виразу, який містять альтернативи чи умова завдання.

Приклад 6. Через кінці відрізка AB , який не перетинає площину α , та його середину C проведено паралельні прямі, які перетинають площину α в точках A_1, B_1, C_1 відповідно. Знайдіть довжину відрізка CC_1 , якщо $AA_1 = 12$ см, $BB_1 = 16$ см.



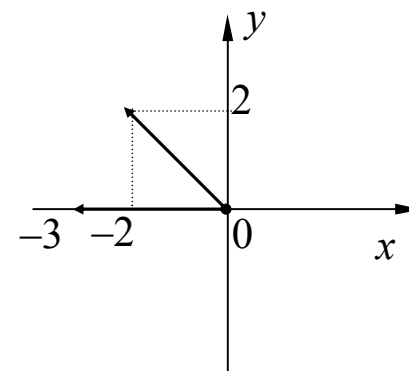
А	Б	В	Г	Д
6 см	8 см	12 см	14 см	20 см

«Розв’язання». Застосуємо прийом угадування «Оцінуй!» Із наведеного рисунка видно, що $AA_1 < CC_1 < BB_1$. Враховуючи умову задачі, маємо: $12 < CC_1 < 16$. Такі обмеження задовольняє лише величина 14 см із альтернативи Г, яка і є правильною відповіддю.

Прийом п'ятий: «Малюй і дивись!»

Прийом ґрунтується на ідеї «доведення» тверджень давньогрецькими геометрами: вони просто малювали малюнок, який гранично точно відповідає умові задачі і писали під ним слово «Дивись!»

Приклад 7. Дано вектори $\vec{m}(-3;0)$ і $\vec{n}(-2;2)$.
Знайдіть кут між векторами $\vec{m}$ і $\vec{n}$.



«Розв'язання». Застосуємо прийом угадування «Малюй і дивись!». Зобразимо вектори в системі координат, відклавши їх від початку координат (див. малюнок). Бачимо, що правильна відповідь: 45° .

Прийом шостий: «Подумай і підставляй!»

Прийом, який схожий за своєю сутністю на перший, однак, у даному випадку підстановка вже не є настільки очевидною, слід проявити спостережливість і увагу.

Приклад 8. Розв'яжіть нерівність $\frac{5}{x} \leq 6 - x$.

А	Б	В	Г
$(0;1] \cup [5;+\infty)$	$(-\infty;0) \cup [1;5]$	$[0;1] \cup [5;+\infty)$	$(-\infty;0] \cup [1;5]$

«Розв'язання». Застосуємо прийом угадування «Подумай і підставляй!»
Очевидно, що $x=0$ не є розв'язком даної нерівності, а тому варіанти **В** і **Г** неправильні, оскільки наведені в них множини містять точку $x=0$. Розглянемо довільну точку, яку містить множина розв'язків з альтернативи **Б**, але не містить множина розв'язків з альтернативи **А** і підставимо її в нашу нерівність.
Нехай $x=-1$, тоді $\frac{5}{-1} \leq 6+1$, $-5 \leq 7$. Тобто число $x=-1$ є розв'язком даної нерівності. Отже, правильна відповідь – **Б**.

Прийом сьомий: «Вмикай ерудицію!»

Базується на знаннях характерних особливостей виразів, функцій, рівнянь та інших математичних об'єктів, які дозволяють значно спростити шлях до розв'язання завдання.

Приклад 9. Пряма $x + y = 5$ утворює з додатним напрямом осі Ox кут:

А	Б	В	Г
90°	45°	135°	30°

«Розв'язання». Звернемося до прийому вгадування «Вмикай ерудицію!» Лінійна функція $y = -x + 5$ спадає, а отже, її графік утворює з додатним напрямком осі абсцис *тупий* кут. Серед кутів, наведених у варіантах відповідей, є лише один тупий. Отже, правильна відповідь – **В**.

Приклад 10. Розв'яжіть систему рівнянь
$$\begin{cases} y^2 - xy = 2, \\ 2y^2 + 3xy = 14. \end{cases}$$

«Розв'язання». Застосуємо прийом угадування «Вмикай ерудицію!» Якщо в системі x і y замінити на $-x$ і $-y$, то вона не зміниться.

Отже, якщо пара чисел $(a; b)$ є розв'язком системи, то пара чисел $(-a; -b)$ теж є розв'язком системи. Більше двох пар розв'язків задана система мати не може, оскільки її розв'язування зводиться до розв'язування квадратного рівняння.

Із першого рівняння отримуємо: $y(y - x) = 2$. Тепер можна досить легко підібрати першу пару чисел: $(1; 2)$, а другою, очевидно, буде пара чисел $(-1; -2)$. Отже, відповідь: $(1; 2)$ і $(-1; -2)$.

Література

1. *Шкільний О.В.* Основи теорії та методики оцінювання навчальних досягнень з математики учнів старшої школи в Україні: Монографія. / О.В.Шкільний. – К.: вид-во НПУ імені М.П. Драгоманова, 2015. – 424 с.
2. *Захарійченко Ю.О., Шкільний О.В.* Типи тестових завдань з математики та особливості їх побудови // Математика в школі. – 2008, №10.– С.15-24.
3. *Шкільний О.В., Захарійченко Ю.О.* Вгадування відповідей до тестових завдань з математики: мистецтво чи шахрайство? // Математика в школі. – 2009, №11.– С.3-11.
4. *Шкільний О.В., Захарійченко Ю.О.* Кілька нових нотаток про вгадування відповідей до тестових завдань з математики // Математична газета. – 2012, №3.– С.1-10.
5. *Захарійченко Ю.О., Шкільний О.В., Захарійченко Л.І., Шкільна О.В.* Повний курс математики в тестах. Енциклопедія тестових завдань.– 5 вид. – Х.: Ранок, 2015.– 496с.
6. *Захарійченко Ю.О., Шкільний О.В.* Твій репетитор. Математика. Навчальний посібник для підготовки до зовнішнього незалежного оцінювання. – К.: Генеза, 2013.– 264с.
7. *Гальперіна А.Р., Захарійченко Ю.О., Шкільний О.В.* Математика. Збірник типових тестових завдань.– 3-тє вид.– К.: Український центр підготовки абітурієнтів, 2014.— 216с.
8. *Шкільний О.В.* Система підготовки до зовнішнього незалежного оцінювання якості знань з математики (частина 1) // Математика в рідній школі. – 2014, №10.– С.4-11.
9. *Шкільний О.В.* Система підготовки до зовнішнього незалежного оцінювання якості знань з математики (частина 2) // Математика в рідній школі. – 2014, №11.– С.4-11.
10. *Шкільний О.В.* Система підготовки до зовнішнього незалежного оцінювання якості знань з математики (частина 3) // Математика в рідній школі. – 2014, №12.– С.2-10.
11. *Шкільний О.В.* Система підготовки до зовнішнього незалежного оцінювання якості знань з математики (частина 4) // Математика в рідній школі. – 2015, №1-2.– С.2-9.
12. *Шкільний О.В.* Система підготовки до зовнішнього незалежного оцінювання якості знань з математики (частина 5) // Математика в рідній школі. – 2015, № 3.– С.2-8.

Дякую за увагу ☺!

